Exercice 1: (3 points)

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x}{\sin x}} = 1$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x} = +\infty$

2) Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.

3) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^5}$

a) f est dérivable à droite en 1.

b) $f'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}$, pour tout $x > 1$.

Exercice 2 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{1}{1+\tan x}$.

Partie A :

1) a) Etudier les variations de f sur $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

b) Déduire que f réalise une bijection de $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ sur un intervalle J à préciser.

On désigne par h sa bijection réciproque.

c) Construire dans un même repère orthonormé les courbes C de f et C' de h.

2) a) Montrer que h est dérivable sur J.

b) Vérifier que pour tout x de J ; $\tan(h(x)) = \frac{1}{x} - 1$.

c) Déduire que pour tout x de J ; $h'(x) = -\frac{1}{x^2+(x-1)^2}$.

3) a) Montrer que pour tout $n > 0$, il existe un unique a_n de $]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ tel que $f(a_n) = \sqrt[3]{n}$.

b) Etudier la monotonie de la suite (a_n).

c) Déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $]-\infty, 0]$ par : $\begin{cases} g(x) = h\left(1-\frac{1}{x}\right) si\ x < 0 \\ g(0) = \frac{-\pi}{4} \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en 0 à gauche.

2) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x < 0$.

3) a) Montrer que pour tout $x < 0$, il existe un réel c de $]x, 0[$ tel que $\frac{g(x)+\frac{\pi}{4}}{x} = -\frac{1}{1+(c-1)^2}$.

b) Déduire que g est dérivable à gauche en 0 et calculer $g'(0)$.

4) Soit u la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_1^n g(\frac{-k}{\sqrt[3]{n^2}})$; $n > 0$.

Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 3: (6 points)

ABCD est un losange tel que $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
On désigne par : I = A * B, J = D * C , K = A * D, G = B * J,
Δ_1 est la médiatrice de [AB] et $\Delta_2 = S_B(\Delta_1)$.

Partie I :

1) a) Faire une figure.
   b) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f (B) = A.
   c) Caractériser f.
2) Caractériser les isométries suivantes : g = f o S_{Δ_1} et h = f o $t_{\overrightarrow{BC}}$.

3) Soit φ l'isométrie telle que $\varphi = h\ o\ g$.
   a) Déterminer $\varphi\ (A)$ et $\varphi\ (K)$.
   b) Déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Partie II :

Soit ψ l'antidéplacement tel que $\psi\ (J) = B$ et $\psi\ (\Delta_2) = \Delta_1$.
1) Montrer que ψ est une symétrie glissante.

2) a) Déterminer l'image de la droite (CD) par ψ.
   b) Déduire $\psi\ (C)$.

3) a) Caractériser l'isométrie $S_G\ o\ \psi$.
   b) Déduire alors la forme réduite de ψ.

Exercice 4 : (5 points)

Partie I :

Soit a un nombre complexe non nul.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation à une inconnue z : (E) : $2z^2 - (3+i\sqrt{3})az + (1+i\sqrt{3})a^2 = 0$.
1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(-1+i\sqrt{3})^2a^2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Partie II :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On considère les points A, B et M dont les affixes sont respectivement
a, $b = ze^{\frac{i\pi}{3}}$ et z non nul.
Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $M_1 = r^{-1}(M)$; $B_1 = r(B)$.
Soient z_1 et b_1 respectivement les affixes de M_1 et B_1.
1) Vérifier que le triangle OMB est équilatéral.

2) a) Montrer que ; $z_1 = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})a$ et $b_1 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})a$.
   b) Montrer que le quadrilatère OM_1AB_1 est un parallélogramme.

3) On suppose que $M \neq A$ et $A \neq B$.
   a) Montrer que : $\frac{a-b_1}{a-z_1} = -\frac{a-b}{a-z}\cdot\frac{z}{b}$
   b) Montrer que les points A, M_1 et B_1 sont alignés si et seulement si les points M, O, A et B sont sur un même cercle.

Mr: LATRACH — Synthèse I — 2013/2014

4 MATHS

Exercice I

1) a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sin x}(x+1)}$

$= 1$ car $\begin{cases}\lim\limits_{0}\dfrac{x}{\sin x} = 1\\ \lim\limits_{0}(x+1) = 1\end{cases}$

ccl : VRAI

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= f'(0)$; $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{\cos x}\\ f'(x) = \dfrac{-\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}\end{cases}$

$= 0$

ccl : FAUX.

2) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{12} - \left(\sqrt[3]{x}\right)^{12} = x^3 - x^4$

$= x^3(1-x)$

si $x > 1 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^{12} < \left(\sqrt[3]{x}\right)^{12}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x} < \sqrt[3]{x}$

si $0 < x < 1 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^{12} > \left(\sqrt[3]{x}\right)^{12}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x} > \sqrt[3]{x}$

ccl : FAUX

3) a) f n'est pas définie en 1^+

— Alors f n'est pas dérivable en 1^+

ccl : FAUX

b) $\begin{cases}\cdot\ x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^5 \text{ est dérivable sur }]1,+\infty[\\ \cdot\ \forall x > 1,\ \left(1-\frac{1}{x}\right)^5 > 0\end{cases}$

— Alors f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{5\left(1-\frac{1}{x}\right)^4 \cdot \frac{1}{x^2}}{3\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}}}$

$= \dfrac{5}{3x^2}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

ccl : Faux

Résumé :

1 a	1 b	2	3 a	3 b
VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX

Exercice 2

(A)

1) a) Variations de f sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

· f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

et on a $f'(x) = \dfrac{-(1+\tan^2 x)}{(1+\tan x)^2}$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

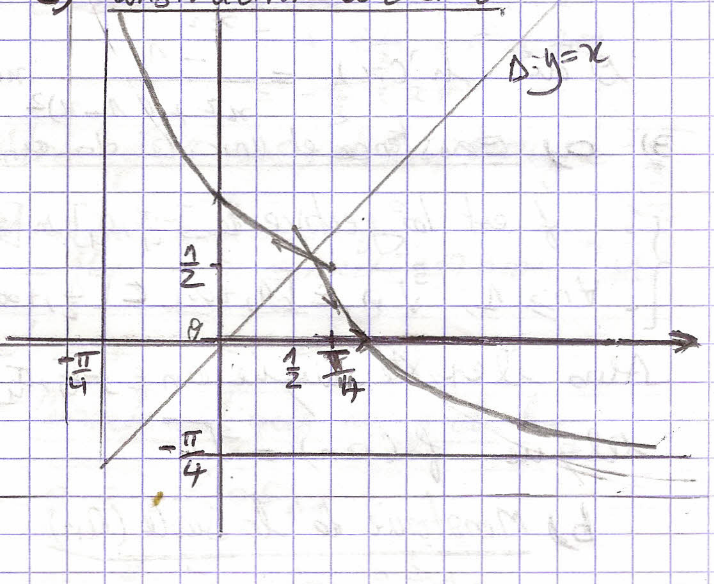
$\lim\limits_{-\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{-\frac{\pi}{4}^+}\dfrac{1}{1+\tan x} = +\infty$

b) Bijectivité de f sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$\begin{cases}\cdot\ f \text{ continue sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\\ \cdot\ f \text{ strictement décroissante sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\\ \cdot\ f(]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) = [\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases}$

— Alors f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

c) Construction de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$



2) a) Dérivabilité de $h = f^{-1}$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$\begin{cases} \cdot\ f \text{ bijective de } [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ sur } [\frac{1}{2}, +\infty[\\ \cdot\ f \text{ dérivable sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ \cdot\ f'(x) \neq 0 ;\ \forall x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$

Alors h est dérivable sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

b) $\tan(h(x)) = \frac{1}{x} - 1 ;\ x \in J$?

$\cdot \begin{pmatrix} y = h(x) \\ x \in J \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \end{pmatrix}$

$\iff x = \dfrac{1}{1 + \tan(y)}$

$\iff \frac{1}{x} - 1 = \tan(y)$

D'où $\tan(h(x)) = \frac{1}{x} - 1 ;\ x \in J$.

ccl : $\tan(h(x)) = \frac{1}{x} - 1 ;\ x \geq \frac{1}{2}$

c) Expression de $h'(x)$

on a : $\tan(h(x)) = \frac{1}{x} - 1$.

$\Rightarrow h'(x) . \tan'(h(x)) = -\frac{1}{x^2}$.

$\Rightarrow h'(x) \left(1 + \tan^2(h(x))\right) = -\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow h'(x) \left(1 + (\frac{1}{x} - 1)^2\right) = \frac{-1}{x^2}$

$\Rightarrow h'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{1-x}{x})^2}$

$\Rightarrow h'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2 + (1-x)^2}{x^2}}$

D'où $h'(x) = \dfrac{-1}{x^2 + (1-x)^2} ;\ x \in J$

3) a) Existence et unicité de a_n

$\begin{cases} \cdot\ f \text{ est bijective de }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ sur } [\frac{1}{2}, +\infty[\\ \cdot\ \forall n \geq 1 ;\ \sqrt[3]{n} \in [1, +\infty[\subset [\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases}$

Alors il existe unique $a_n \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ tel que $f(a_n) = \sqrt[3]{n}$.

b) Monotonie de la suite (a_n)

$\cdot\ n + 1 > n$

$\Rightarrow \sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{n}$

$\Rightarrow f(a_{n+1}) > f(a_n)$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ car f est décroissante sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

ccl : (a_n) est décroissante.

c) Convergence de (a_n) et calcul de $\lim a_n$.

$\begin{cases} \cdot\ (a_n) \text{ est décroissante} \\ \cdot\ (a_n) \text{ est minorée par } -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Alors (a_n) est convergente.

on a $a_n = f^{-1}(\sqrt[3]{n})$

$\begin{cases} \cdot\ \lim(\sqrt[3]{n}) = +\infty \\ \cdot\ \lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{+\infty} f^{-1}(\sqrt[3]{n}) = -\frac{\pi}{4}$

D'où $\lim(a_n) = -\frac{\pi}{4}$.

ccl : (a_n) est convergente vers $(-\frac{\pi}{4})$

(B)

1) Continuité de g en 0^-.

$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \frac{1}{x}) = +\infty \\ \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \lim\limits_{0^-} h(1 - \frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{4}$

Alors $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\frac{\pi}{4} = g(0)$

ccl : g est continue en 0^-.

2) Dérivabilité de g et calcul de $g'(x)$

$\begin{cases} \cdot\ x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} \text{ est } d \text{ sur }]-\infty, 0[\\ \cdot\ h \text{ est dérivable sur } [\frac{1}{2} ; +\infty[\\ \cdot\ \forall x < 0 ;\ 1 - \frac{1}{x} > 1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$

et on a : $g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot h'\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2+1}$$

D'où $g'(x) = \dfrac{-1}{1+(x-1)^2}$

3) a) Existence de $c \in]x,0[$, $x<0$

$\begin{cases} \bullet\ g \text{ continue sur } [x,0] \\ \bullet\ g \text{ dérivable sur }]x,0[\end{cases}$

T.A.F ⟹ Il existe $c \in]x,0[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1+(c-1)^2} = \frac{g(x)+\frac{\pi}{4}}{x}$$

b) Dérivabilité de g en 0^- et $g'(0)$?

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{g(x)+\frac{\pi}{4}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{1+(c-1)^2}$$

Comme $x<c<0$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{c\to 0}\frac{-1}{1+(c-1)^2} = -\frac{1}{2}$

ccl : g est dérivable en 0^- et $g'(0) = -\frac{1}{2}$

4) Convergence de (U_n)

on a : $1 \le k \le n$

$$\Rightarrow \frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}} \le \frac{-k}{\sqrt[3]{n^2}} \le \frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \le g\left(\frac{-k}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \le g\left(\frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$; g st ↓ sur $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow n\, g\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \le n^2 U_n \le n\, g\left(\frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} g\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \le U_n \le \frac{1}{n} g\left(\frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \quad ①$$

Comme $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0 = \cancel{\lim_{+\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}} \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, g\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = 0$ ②

* $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}} = \lim_{+\infty}\frac{-\sqrt[3]{n^3}}{\sqrt[3]{n^2}} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = h(1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = 0$

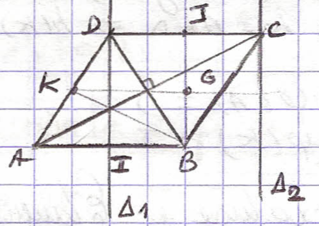
Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, g\left(\frac{-n}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = 0$ ③

①, ② et ③ ⟹ $\lim U_n = 0$

Ccl. (U_n) st Convergente vers 0.

Exercice 3

a) Figure



b) Existence et unicité de déplacement f.

$\begin{cases} \bullet\ BC = BA \quad (ABCD \text{ losange}) \\ \bullet\ BC \neq 0 \end{cases}$

Alors Il existe unique déplacement f telle que $f(C) = B$ et $f(B) = A$.

c) Caractéristique de f.

• $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + \pi \ (2\pi)$

$\equiv +\frac{2\pi}{3} + \pi \ (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

Alors f st une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Soit Ω le centre de f.

Alors $\Omega \in \text{méd}[BC] \cap \text{méd}[BA]$

$\Rightarrow \Omega = D$

ccl $f = R\left(D, -\frac{\pi}{3}\right)$

2) Caractéristiques de g et h

• $g = f \circ S_{\Delta_1}$

$= R_{\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{\Delta_1}$

$\begin{cases} \cdot\ g \text{ est un anti deplacement} \\ \cdot\ g(CD) = D \\ \cdot\ g(A) = A \end{cases}$

Alors $g = S_{AD}$

* $h = f \circ t_{\vec{BC}} = R_{(D,-\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{BC}}$

h étant la composé d'1 translatiq et d'1 rotatiq d'angle $-\frac{\pi}{3}$ Alors h est une rotatiq d'angle $-\frac{\pi}{3}$

Comme $h(B) = B$

Alors $h = R_{(B,-\frac{\pi}{3})}$

ccl: $g = S_{AD}$; $h = R_{(B,-\frac{\pi}{3})}$

3) a) Image de A et K par φ.

$\varphi(A) = h\circ g(A) = h(A) = D$

$\varphi(K) = h\circ g(K) = h(K) = J$

Car $K = A*D \Rightarrow h(K) = h(A)*h(D)$
$= D*C = J$

ccl: $\begin{cases}\varphi(A) = D \\ \varphi(K) = J\end{cases}$

b) Nature et Élément Caractéristique de φ

. $med[AD] \neq med[KJ]$
Alors φ symetrie glissante

. On pose $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$; $(\vec{u} \in \vec{\Delta})$

. $\varphi(A) = D \Rightarrow A*D = K \in \Delta$

. $J = \varphi(K) = t_{\vec{u}}(K) \Rightarrow \vec{u} = \vec{KJ}$

D'où $\varphi = t_{\vec{KJ}} \circ S_{KJ}$

ccl: $\varphi = t_{\vec{KJ}} \circ S_{(KJ)}$

II

1) ψ est une symetrie glissante

Supposons que $\psi = S_\Delta$.

Comme $\psi(J) = B \Rightarrow \Delta = med[JB]$
$= (KG)$

Alors $\psi(\Delta_1) = S_\Delta(\Delta_1) = \Delta_1$
car $\Delta_1 \perp (KG)$

Ce-ci st absur de

Alors ψ st une symetrie glissante

2) a) Image de (CD) par ψ.

$\left.\begin{array}{l}\cdot\ (CD) \perp \Delta_1 \\ \cdot\ \psi(J) = B\end{array}\right\} \Rightarrow \psi(CD)$ est la perpendiculaire à Δ_2 passant par B

Alors $\psi(CD) = (AB)$

b) Image de C par ψ.

$C \in (CD) \cap \Delta_2$

Alors $\psi(C) \in (AB) \cap \Delta_1$ car ψ Conserve le Contact

$\Rightarrow \psi(C) = I$

ccl $\psi(C) = I$

3) a) Caractéristique de $S_G \circ \psi$

$\begin{cases} \cdot\ S_G\circ\psi \text{ anti deplacement} \\ \cdot\ S_G\circ\psi(C) = C \\ \cdot\ S_G\circ\psi(J) = J \end{cases}$

Alors $S_G \circ \psi = S_{CJ}$

ccl: $S_G \circ \psi = S_{CJ}$

b) Forme Réduite de ψ

On a: $S_G \circ \psi = S_{CJ}$

$\Rightarrow \psi = S_G \circ S_{CJ}$

$= S_{GJ} \circ S_{GK} \circ S_{CJ}$

$= S_{GJ} \circ t_{\vec{JB}}$

$= S_{JB} \circ t_{\vec{JB}}$

ccl: ψ st une symetrie glissante d'axe (JB) et de vecteur $\vec{JB}$

et on a: $\psi = S_{JB} \circ t_{\vec{JB}}$

Exercice 4

I

1) Calcul de Δ.

$\Delta = (3+i\sqrt{3})^2 a^2 - 8(1+i\sqrt{3})a^2$

4 $= (1-i\sqrt{3})^2 a^2$

ccl: $\Delta = (-1+i\sqrt{3})^2 \cdot a^2$

2) Résolution de (E)

$\Delta = [(-1+i\sqrt{3})a]^2$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{3+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{4}\cdot a$

$= \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}a = a e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = \dfrac{3+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{4}a = a$

ccl $S_{\mathbb{C}} = \{a ; a e^{i\frac{\pi}{3}}\}$

II

1) OMB est Equilateral.

on a: $b = z e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow B = R_{(0,\frac{\pi}{3})}(M)$

$\Rightarrow$ OBM est équilatéral.

2) a) Expression de z_1 et b_1.

on a: • $M_1 = r^{-1}(M)$

$\Leftrightarrow z_1 - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-a)$

$\Leftrightarrow z_1 = (1-e^{-i\frac{\pi}{3}})a + e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

$\Rightarrow z_1 = (\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z + (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})a$

• $B_1 = r(B)$

$\Leftrightarrow b_1 - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

$\Leftrightarrow b_1 = a(1-e^{i\frac{\pi}{3}}) + b e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= a(1-e^{i\frac{\pi}{3}}) + z e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow b_1 = (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z + a(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

b) OM_1AB_1 est un parallelogramme.

$Z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{3}}a$

$Z_{\overrightarrow{B_1A}} = a(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

$= a e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

Alors $Z_{\overrightarrow{OM_1}} = Z_{\overrightarrow{B_1A}}$

D'où $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{B_1A}$

$\Rightarrow$ OM_1AB_1 est un parallelogramme.

3) a) $\dfrac{a-b_1}{a-z_1} = -\dfrac{a-b}{a-z}\cdot\dfrac{z}{b}$?

$\dfrac{a-b_1}{a-z_1} = \dfrac{a(1-e^{i\frac{\pi}{3}}) - e^{i\frac{2\pi}{3}}z}{a(1-e^{i\frac{\pi}{3}}) - e^{-i\frac{\pi}{3}}z}$

$= \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}a - e^{i\frac{\pi}{3}}b}{e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)}$; $b = z e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\frac{2\pi}{3}}\dfrac{a-b}{a-z}$

$= -\dfrac{a-b}{a-z}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

$= -\dfrac{a-b}{a-z}\cdot\dfrac{z}{b}$; $\dfrac{b}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ccl: $\dfrac{a-b_1}{a-z_1} = -\dfrac{a-b}{a-z}\cdot\dfrac{z}{b}$

b) A, M_1 et B_1 sont alignés ssi M, O, A, B sont sur un même cercle.

A, M_1, B_1 alignés $\Leftrightarrow \arg(\frac{a-b_1}{a-z_1}) = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(\frac{z}{b}) + \arg(\frac{a-b}{a-z}) = k\pi$

$\Leftrightarrow \arg(\frac{a-b}{a-z}) = \arg(\frac{b}{z}) + k\pi$

$\Leftrightarrow$ (~~...~~ ,

$\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}) + k\pi$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}) + k\pi$

$\Leftrightarrow$ M, O, A, B sont cocycliques
ou
M, O, A, B alignés impossible

$\Leftrightarrow$ M, O, A, B sont sur un même cercle

car OMB non alignés

ccl: A, M_1, B alignés $\Leftrightarrow$ M, O, A, B sont sur un même cercle

END